

Hurtigreferanse (cheat sheet) til boken Automatiseringsteknikk

<https://techteach.no/automatiseringsteknikk>

Finn Aakre Haugen

1. januar 2026

Reguleringsavvik

$$e = r - y_{mf} \quad (1)$$

der e er reguleringsavviket, r er referanse (eller settpunkt eller skal-verdi) og y_{mf} er filtrert prosessmålesignal.

IAE (Integral of Absolute value of control Error)

$$\text{IAE} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{stop}}} |e(t)| dt \approx [|e_{\text{start}}| + \dots + |e_{\text{stop}}|] \cdot t_s \quad (2)$$

Teknisk flytskjema (TFS)

Mye brukte bokstavsymboler:

FT = Flow Transmitter. FC = Flow Controller.

LT = Level Transmitter. LC = Level Controller.

PT = Pressure Transmitter. PC = Pressure Controller.

TT = Temperature Transmitter. TC = Temperature Controller.

Nummereringen er typisk parallell: Tallkodene kan være de samme (repeteres) for hver nye bokstavkode eller for hver nye bokstavkombinasjon. Eksempler: FC-101. FT-101. LC-102. LT-102. Tallkoden kan være et sløyfenummer for den aktuelle reguleringsløyfen.

Signalsymboler:

General (undefined) signal:

———— or ———/——/——/——

Electrical signal:

----- or ———/——/——/—— or —□—□—□—□—

Digital signal:

—○—○—○—

Pneumatic signal:

——/——/——/—— or —^——^——^——

Analog-digital-oppløsning

$$R = \frac{y_{\text{analog}_{\text{maks}}} - y_{\text{analog}_{\text{min}}}}{2^n - 1} \quad (3)$$

Målesignalskalering

Prosessverdi som funksjon av måleverdi:

$$p = am + b \quad (4)$$

$$a = \frac{p_2 - p_1}{m_2 - m_1} \quad (5)$$

$$b = p_1 - am_1 \quad (6)$$

der (p_1, m_1) og (p_2, m_2) er gitte datapunkter for sensoren/transmitteren.

EWMA-filter (Exponentially Weighed Moving Average)

$$y_{\text{mf}} = (1 - a) y_{\text{mf,prev}} + a y_{\text{m}} \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{N_f} \quad (8)$$

$$N_f = \frac{t_f}{t_s} + 1 \quad (9)$$

Tidskonstantfilter

Differensiallikning:

$$y'_{\text{mf}} = (y_{\text{m}} - y_{\text{mf}}) / t_f \quad (10)$$

Transferfunksjon:

$$\frac{Y_{\text{mf}}(s)}{Y_{\text{m}}(s)} = H_f(s) = \frac{1}{t_f s + 1} \quad (11)$$

Tidsdiskret filteralgoritme (basert på Euler bakoverdiskretisering) er lik (7) der

$$a = \frac{1}{\frac{t_f}{t_s} + 1} = \frac{t_s}{t_f + t_s} \quad (12)$$

Analogt RC-filter

(10) eller (11) med

$$t_f = RC \quad (13)$$

Ventillikningen

$$Q = K_v f(z) \sqrt{\frac{\Delta p}{G}} \quad (14)$$

Elektrisk effekt

$$P_{\text{average}} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} \quad (15)$$

Pådragsskalering

$$v = a \cdot u + b \quad (16)$$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1} \quad (17)$$

$$b = v_1 - a \cdot u_1 \quad (18)$$

Pulsbreddemodulering

$$t_{\text{on}} = D \cdot t_p \quad (19)$$

Ohms lov

$$R = \frac{U}{I} \quad (20)$$

Av/på-regulator

$$u = \begin{cases} u_{\text{on}} & \text{hvis } e \geq 0 \\ u_{\text{off}} & \text{hvis } e < 0 \end{cases} \quad (21)$$

Tidskontinuerlig PID-regulator

$$u = u_{\text{man}} + \underbrace{K_c e}_{u_p} + \underbrace{\frac{K_c}{T_i} \int_0^t e \, d\tau}_{u_i} + \underbrace{K_c T_d e_f'}_{u_d} \quad (22)$$

Tidsdiskret PID-regulator (algoritme)

$$u = u_{\text{man}} + u_p + u_i + u_d \quad (23)$$

der

$$u_p = K_c e$$

$$u_i = u_{i,\text{prev}} + (K_c/T_i) t_s e \quad (24)$$

$$u_d = K_c T_d (e_f - e_{f,\text{prev}}) / t_s \quad (25)$$

der

$$e_f = (1 - a_d) e_{f,\text{prev}} + a_d e \quad (26)$$

Tidsdiskret PI-regulator (algoritme)

$$u = u_{\text{man}} + u_p + u_i + u_d \quad (27)$$

der

$$u_p = K_c e$$

$$u_i = u_{i,\text{prev}} + (K_c/T_i) t_s e \quad (28)$$

Proporsjonalbånd

$$PB = \frac{100 \%}{K_c} \iff K_c = \frac{100 \%}{PB} \quad (29)$$

Alternative PID-parametre

$$K_i = \frac{K_c}{T_i} \quad (30)$$

$$K_d = K_c T_d \quad (31)$$

Reduksjon av P-spark

$$u_p = K_c (w_p r - y_{mf}) \quad (32)$$

der $w_p = 0,3$ (typisk).

Reduksjon av D-spark

$$u_d = K_c T_d (w_d r - y_{mf})'_f \quad (33)$$

der $w_d = 0$.

Implementering av integratorbegrensning (anti windup) i PID-regulator

Integralleddet u_i låses (oppdateres ikke) når u ligger an til å bli større enn u_{maks} eller mindre enn u_{min} .

Revers- og direktevirkning i PID-regulator

- For prosessforsterkning $K_{\text{prosess}} > 0$, velg $K_c > 0$, dvs. reversvirkning. «Positiv-positiv.»
 - For prosessforsterkning $K_{\text{prosess}} < 0$, velg $K_c < 0$, dvs. direktevirkning. «Negativ-negativ.»
-

Ziegler-Nichols PID-innstilling

	K_c	T_i	T_d
P-regulator	$0,5K_{cu}$	∞	0
PI-regulator	$0,45K_{cu}$	$\frac{t_p}{1,2}$	0
PID-regulator	$0,6K_{cu}$	$\frac{t_p}{2}$	$\frac{t_p}{8} = \frac{T_i}{4}$

Relaxed Ziegler-Nichols PI-innstilling

	K_c	T_i
Relaxed Ziegler-Nichols	$0,25K_{cu}$	$1,25t_p$
Opprinnelig Ziegler-Nichols	$0,45K_{cu}$	$\frac{t_p}{1,2}$

Kvasi Ziegler-Nichols PI-innstilling

$$K_c = 0,45K_{c0} \quad (34)$$

$$T_i = \frac{t_{p0}}{12} \quad (35)$$

Åstrøm-Hägglunds relémetode

1. Les av t_p , D_u og D_y fra eksperiment med av/på-regulator.
2. Beregn kritisk forsterkning:

$$K_{cu} = 1,27 \frac{D_u}{D_y} \quad (36)$$

3. Beregn PID-innstilling med Ziegler-Nichols-formlene eller Relaxed Ziegler-Nichols-formlene med K_{cu} og t_p .
-

Good Gain-metoden

$$K_c = 0,8K_{c,GG} \quad (37)$$

$$T_i = 1,5t_{ou} \quad (38)$$

Prosessresponsmetoden

$$R_n = \frac{R}{\Delta u} \quad (39)$$

$$K_c = \frac{1}{2R_n L} \quad (40)$$

$$T_i = 4L \quad (41)$$

Ziegler-Nichols åpen sløyfe-metode

$$R_n = \frac{R}{\Delta u} \quad (42)$$

$$K_c = \frac{0,9}{R_n L} \quad (43)$$

$$T_i = 3,3L \quad (44)$$

PID-parameterstyring (gain scheduling)

PID-parametertabell:

GS	K_c	T_i	T_d
GS_1	K_{c1}	T_{i1}	T_{d1}
GS_2	K_{c2}	T_{i2}	T_{d2}
GS_3	K_{c3}	T_{i3}	T_{d3}

Typisk: Stykkevis konstant interpolering mellom PID-parametersettene.

Alternativt: Stykkevis lineær interpolering (her antatt to intervaller: GS_1 - GS_2 og GS_2 - GS_3):

$$K_c = a_{1,2} \cdot GS + b_{1,2} \quad (45)$$

$$K_c = a_{2,3} \cdot GS + b_{2,3} \quad (46)$$

Typisk ved tank med gjennomstrømning F [kg/s]:

$$\text{Prosessens forsterkning} \propto \frac{1}{F} \quad (47)$$

$$\text{Prosessens tidskonstant} \propto \frac{1}{F} \quad (48)$$

$$\text{Prosessens tidsforsinkelse} \propto \frac{1}{F} \quad (49)$$

$$GS = F \quad (50)$$

PI-innstilling ved midlende nivåregulering (averaging level control)

1. Spesifiser akseptabel $\Delta h_{\max}$ [m] for antatt $\Delta F_{\text{in,max}}$ [m³/s].

2. Innstilling av PI-nivåregulator:

$$K_c = -\frac{\Delta F_{\text{in,max}}}{\Delta h_{\max}} \quad (51)$$

$$T_i = 2A \frac{\Delta h_{\max}}{\Delta F_{\text{in,max}}} \quad (52)$$

PLS-programmeringsspråk støttet i Codesys

- Ladder (LD) – iht. IEC 61131-3-standarden
 - Function Block Diagram (FBD) – iht. IEC 61131-3
 - Structured Text (ST) – iht. IEC 61131-3
 - ~~Instruction List (IL)~~ - tatt ut Codesys og fra IEC 61131-3
 - Continuous Function Chart (CFC) – er ikke definert i IEC 61131-3
 - Sequential Function Chart (SFC) – iht. IEC 61131-3-standarden
-

Typer POU (Program Organization Units)

- PRG (programmer), som kjøres syklisk eller hendelsesstyrt.
 - FUN (funksjoner), som ikke har intern hukommelse, dvs. at verdien av interne FUN-variabler ikke lagres mellom programsykler. Kan brukes for programmering av f.eks. formler.
 - FB (funksjonsblokker), som har intern hukommelse for lagring av interne variabler, dvs. at verdien av interne FB-variabler kan lagres mellom programsykler. Kan brukes for programmering av formler. Må brukes ved programmering av algoritmer der variabelverdier skal huskes mellom hver programsyklus.
-

Logiske funksjoner

AND:

in_1	in_2	out_1 := in_1 AND in_2;
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE
FALSE	FALSE	FALSE

OR:

in_1	in_2	out_1 := in_1 OR in_2;
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	TRUE
FALSE	TRUE	TRUE
FALSE	FALSE	FALSE

NOT:

in_1	out_1 := NOT in_1;
TRUE	FALSE
FALSE	TRUE

Matematisk modellform for dynamiske systemer

Differensiallikning, som beregner den tidsderivate av systemets tilstand:

$$x' = f(\cdot) \quad (53)$$

Integrallikning, som beregner tilstanden:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\theta) d\theta \quad (54)$$

Prinsipper for matematisk modellering

Massebalanse:

$$m' = \sum_i F_i \quad (55)$$

Energibalanse:

$$E' = \sum_i Q_i \quad (56)$$

Kraftbalanse (Newtons 2. lov for lineær bevegelse):

$$mv' = my'' = \sum_i F_i \quad (57)$$

Momentbalanse (Newtons 2. lov for rotasjonsbevegelse):

$$J\omega' = J\theta'' = \sum_i \tau_i \quad (58)$$

Sammenheng mellom moment, armlengde og kraft:

$$\tau = FL \quad (59)$$

Sammenheng mellom buelengde, radius og vinkel:

$$b = ar \quad (60)$$

Momentan elektrisk effekt:

$$P = ui = Ri^2 = \frac{u^2}{R} \quad (61)$$

Midlere elektrisk effekt:

$$P_{\text{midlere}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = R I_{\text{eff}}^2 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} \quad (62)$$

Modellblokkdiagrammer

Anta modellen

$$x'(t) = f(\cdot) \quad (63)$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\theta) d\theta \quad (64)$$

Opptegning av blokkdiagram: Start med å tegne en integratorblokk for (64). Deretter tegnes blokkene som beregner x' , som er inngangen til integratorblokken.

Tilstandsrommodell

$$x' = f(x, u, d, p) \equiv f(\cdot) \quad (65)$$

$$y = g(x, u, d, p) \equiv g(\cdot) \quad (66)$$

der x er tilstandsvektor (og tilsvarende for de andre variablene):

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, \dots, x_n]^T \quad (67)$$

Lineær tilstandsrommodell

$$x' = Ax + Bu \quad (68)$$

$$y = Cx + Du \quad (69)$$

Linearisert tilstandsrommodell

$$\Delta x' = \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0}_{A} \Delta x + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0}_{B} \Delta u \quad (70)$$

$$= A \Delta x + B \Delta u \quad (71)$$

Simuleringsalgoritme basert på Eulers foroverdmetode

- Gitt startverdier for x , u , d og p . Systemets initialtilstand x_{init} er startverdien for x .
- Tilstandsbegrensning:

$$x \in [x_{\min}, x_{\max}] \quad (72)$$

- x slik den foreligger på dette punktet i algoritmen, er simulert tilstand.
- Hvis aktuelt: Endre u , d og p .
- Hvis aktuelt: Lagre x , u , d og p i array el.l.

- Tidsderivert:

$$x' = f(x, u, d, p) \quad (73)$$

- Prediksjon:

$$x_{\text{next}} = x + t_s x' \quad (74)$$

- Tidsindeksskift:

$$x = x_{\text{next}} \quad (75)$$

Ev. tidsforsinkelser kan realiseres med en array der elementene i prinsippet flytter ett element mot høyre ved hvert tidsskritt. Den forsinkede variabelen tas ut som siste element i arrayen. Ikke-forsinket variabel settes inn som første element. Arrayens lengde er $N_d = t_d/t_s$.

Transferfunksjon

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (76)$$

eller

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (77)$$

Tidsrespons beregnet med invers Laplacetransformasjon

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)U(s)\} \quad (78)$$

Sluttverditeoremet

$$y_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s)U(s) \quad (79)$$

Fra tilstandsrommodell til transferfunksjon

Gitt lineær tilstandsrommodell:

$$x' = Ax + Bu \quad (80)$$

$$y = Cx + Du \quad (81)$$

Transferfunksjon fra $U(s)$ til $Y(s)$:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (82)$$

Integratormodell

Differensiallikning:

$$y' = K_i u \quad (83)$$

Transferfunksjon:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (84)$$

Sprangrespons:

$$y(t) = K_i A_u t \quad (85)$$

Tidskonstantmodell

Differensiallikning:

$$t_c y' = Ku - y \quad (86)$$

Transferfunksjon:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{t_c s + 1} \quad (87)$$

Sprangrespons:

$$y(t) = K A_u (1 - e^{-t/t_c}) \quad (88)$$

Tidsforsinkelse

$$y(t) = u(t - t_d) \quad (89)$$

Transferfunksjon:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-t_d s} \quad (90)$$

Padéapproximasjon:

$$e^{-t_d s} \approx \frac{1 - k_1 s + k_2 s^2 - \dots k_n s^n}{1 + k_1 s + k_2 s^2 + \dots k_n s^n} \quad (91)$$

Tidskonstant + tidsforsinkelse + prosessforstyrrelse

$$t_c y(t)' = K_u u(t - t_d) + K_d d(t) - y(t) \quad (92)$$

2. ordens system

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (93)$$

Poler til underdempet system:

$$p_1, p_2 = \underbrace{-\zeta\omega_0}_{\text{Re}} \pm j \underbrace{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0}_{\text{Im}} \quad (94)$$

Responstid til seriekoblede tidskonstantsystemer

$$t_{63\%} \approx \sum_i t_{c_i} \quad (95)$$

Modelltilpassing

Modellparametrene p beregnes som den optimale løsningen til optimeringsproblemet

$$\min_{p=[p(1), p(2), \dots, p(r)]} f$$

Modellparametrene p er optimeringsvariablene. f er objektfunksjonen:

$$f = \text{SSPE} = \sum_{k=1}^N e_k^2 \quad (96)$$

e_k er prediksjonsfeilen:

$$e_k = y_{\text{obs},k} - y_{\text{pred},k} \quad (97)$$

$y_{\text{obs},k}$ er observerte (typisk målte) y . $y_{\text{pred},k}$ kan være simulerte y på basis av p .

Simulering av reguleringssystemer

Hele reguleringssystemet simuleres. Mulige simuleringssplattformer:

- Simuleringsalgoritmer implementert i elementær programkode (f.eks. Python, Matlab)
 - Modellblokkdiagrammer der blokker kan være programmert med elementær kode (f.eks. Codesys, OpenModelica, LabVIEW, Simulink)
 - Transferfunksjonsmodeller (f.eks. Pythons Control-pakke, Matlabs Control System Toolbox)
-

Beregning av statiske responser i reguleringsystemer

Alle variabler i reguleringsystemets modell antas konstante, og alle tidsderivate settes derfor lik null. Du kan «bli kvitt» integraler i modellen ved å tidsderivere hele modellen. Den resulterende statiske modellen er en algebraisk statisk modell som du kan løse mhp. variabelen du skal beregne den statiske responsen i.

Transferfunksjonsmodeller av reguleringsystemer

PID-regulatorens transferfunksjon:

$$H_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_c}{T_i s} + \frac{K_c T_d s}{t_{fd} s + 1} \quad (98)$$

PI-regulatorens transferfunksjon:

$$H_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c + \frac{K_c}{T_i s} + \frac{K_c T_d s}{t_{fd} s + 1} \quad (99)$$

Sløyfetransferfunksjonen:

$$H_l(s) = H_p(s)H_c(s) \quad (100)$$

Følgetransferfunksjonen:

$$H_t(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{H_p(s)H_c(s)}{1 + H_p(s)H_c(s)} = \frac{H_l(s)}{1 + H_l(s)} \quad (101)$$

Sensitivitetstransferfunksjonen:

$$H_s(s) = \frac{1}{1 + H_l(s)} = \frac{1}{1 + H_p(s)H_c(s)} \quad (102)$$

Tolkninger av $H_s(s)$:

- Transferfunksjon fra referanse til reguleringsavvik:

$$H_s(s) = \frac{E(s)}{R(s)} \quad (103)$$

- Forholdet mellom reguleringsavvik for regulert prosess og uregulert prosess:

$$H_s(s) = \frac{E_{d,\text{regulert}}(s)}{E_{d,\text{uregulert}}(s)} \quad (104)$$

Frekvensresponsanalyse

Amplitudeforsterkning:

$$A(\omega) = \frac{A_y}{A_u}(\omega) \quad (105)$$

Faseforskyvning:

$$\phi(\omega) = -\omega \cdot \Delta t \text{ [rad]} \quad (106)$$

Desibel:

$$A = 20 \log_{10} A \text{ dB} \quad (107)$$

Frekvensresponsen beregnet fra transferfunksjon:

$$A(\omega) = |H(j\omega)| \quad (108)$$

$$\phi(\omega) = \arg H(j\omega) \quad (109)$$

Definisjon av -3 dB-båndbredde ω_c :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (110)$$

-3 dB-båndbredde til tidskonstantsystem:

$$\omega_c = \frac{1}{t_c} \quad (111)$$

Frekvensresponsanalyse av reguleringsystemer

Analysen baseres på $H_s(j\omega)$, $H_t(j\omega)$ og/eller $H_l(j\omega)$.

- God referansefølging:

$$|H_s(j\omega)| \ll 1, |H_t(j\omega)| \approx 1, |H_l(j\omega)| \gg 1 \quad (112)$$

- Dårlig referansefølging:

$$|H_s(j\omega)| \approx 1, |H_t(j\omega)| \ll 1, |H_l(j\omega)| \ll 1 \quad (113)$$

Alternative båndbreddedefinisjoner til reguleringsystemer:

- ω_t :

$$|H_t(j\omega_t)| = 1/\sqrt{2} \approx 0,71 = -3 \text{ dB} \quad (114)$$

- ω_l :

$$|H_l(j\omega_l)| = 1 = 0 \text{ dB} \quad (115)$$

- ω_s :

$$|H_s(j\omega_s)| = 1 - 1/\sqrt{2} \approx 0,29 \approx -11 \text{ dB} \quad (116)$$

Eksperimentell stabilitetsanalyse av reguleringsystemer

Eksperimentell forsterkningsmargin:

$$GM = \Delta K_u \quad (117)$$

Eksperimentell fasemargin:

$$PM = \frac{\Delta t_{d,u}}{t_p} \cdot 360^\circ \quad (118)$$

Akseptable stabilitetsmarginer:

$$1,7 \leq GM \leq 4,0 \quad (119)$$

$$30^\circ \leq PM \leq 45^\circ \quad (120)$$

Stabilitetsanalyse av dynamiske systemer

Stabilitetsdefinisjoner basert på stasjonær impulsrespons $h(\infty)$:

- Asymptotisk stabilt system

$$h(\infty) = 0 \quad (121)$$

- Marginalt stabilt system:

$$0 < |h(\infty)| < \infty \quad (122)$$

- Ustabilt system:

$$|h(\infty)| = \pm\infty \quad (123)$$

Stabilitetsanalyse basert på polplasseringen til systemets transferfunksjon:

- Asymptotisk stabilt system: Alle polene ligger i venstre halvplan.
- Marginalt stabilt system: En eller flere poler ligger på imaginæraksen. Disse polene må være ulike, ellers er systemet ustabilt.
- Ustabilt system: Minst én pol ligger i høyre halvplan. Systemer med flere poler på imaginæraksen er også ustabile.

Stabilitetsanalyse av tilstandsrommodeller: Bytt ut «pol» ovenfor med «egenverdi» siden systemets egenverdier er de samme som systemets poler. Egenverdiene (polene) kan beregnes som s -løsningene til den karakteristiske likning:

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = 0 \quad (124)$$

Stabilitetsanalyse av reguleringsløyfer

Analyse basert på poler baseres på polplasseringen til følgetransferfunksjonen $H_t(s)$.

Analyse basert på frekvesresponsanalyse:

- Nyquists stabilitetskriterium:

- Asymptotisk stabilt system: $\omega_c < \omega_{180}$.
- Marginalt stabilt system: $\omega_c = \omega_{180}$.
- Ustabilt system: $\omega_c > \omega_{180}$.
- Bode-Nyquists stabilitetskriterium:

$$\text{GM} > 0 \text{ dB} = 1 \text{ og dessuten PM} > 0^\circ \quad (125)$$

Tidsdiskrete modeller

Eksempel på differenslikning:

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_0 y_{k-2} + b_0 u_{k-2} \quad (126)$$

Tidsdiskret tilstandsrommodell:

$$x_{k+1} = f_d(x_k, u_k, d_k, p_k) \quad (127)$$

$$y_k = g_d(x_k, u_k, d_k, p_k) \quad (128)$$

Lineær tidsdiskret tilstandsrommodell:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (129)$$

$$y_k = C_d x_k + D_d u_k \quad (130)$$

Euler forover-diskretisert tilstandsrommodell:

$$x_{k+1} = x_k + t_s f(x_k, u_k) \quad (131)$$

z -transferfunksjon:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \quad (132)$$

Stabilitetsegenskapene til tidsdiskrete systemer

- Asymptotisk stabilt system: Alle polene til transferfunksjonen ligger innenfor enhetssirkelen.
 - Marginalt stabilt system: En eller flere poler ligger på enhetssirkelen. Disse polene må være ulike, ellers er systemet ustabilt.
 - Ustabilt system: Minst én pol ligger utenfor enhetssirkelen. Systemer med flere poler enn én på enhetssirkelen er også ustabile.
-

Stabilitetsanalyse av tidsdiskret tilbakekoplet system

Analysen baseres på polplasseringen til følgetransferfunksjonen $H_t(z)$.

Stokastiske signaler

Middelverdi:

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \quad (133)$$

Varsians:

$$\text{Var}(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} [x_k - m_x]^2 \quad (134)$$

Standardavvik:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} \quad (135)$$

Autokovarians (med null tidsforskyvning):

$$R_x(0) = E\{[x_{k+0} - m_x][x_k - m_x]\} = E\{[x_k - m_x]^2\} = \text{Var}(x) \quad (136)$$

Autokovariansen $R_x(L)$ estimert fra dataserie $\{x\}$:

$$R_x(L) = \frac{1}{N-L} \sum_{k=0}^{N-1-|L|} [x_{k+L} - m_x][x_k - m_x] \quad (137)$$

Farget støy vha. EWMA-filter (tidsdiskret tidskonstantfilter):

$$x_f = (1 - a) x_{f,\text{prev}} + ax \quad (138)$$

Endring av stokastisk signal gjennom et skalart statistisk system,

$$y_k = Gv_k + C \quad (139)$$

- Middelverdi:

$$m_y = Gm_v + C \quad (140)$$

- Varians;

$$\sigma_y^2 = G^2 \sigma_v^2 \quad (141)$$

- Standardavvik:

$$\sigma_y = G\sigma_v \quad (142)$$

Analysen baseres på polplasseringen til følgetransferfunksjonen $H_t(z)$.

Observerbarhetstest

Systemet

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (143)$$

$$y_k = C_d x_k + D_d u_k \quad (144)$$

er observerbart hvis og bare hvis observabilitetsmatrisen

$$M_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ \vdots \\ C_d A_d^{n-1} \end{bmatrix} \quad (145)$$

har rang n .

Stasjonært Kalmanfilter

$$\text{Initialisering: } x_{p,0} = x_{\text{init}} \quad (146)$$

$$\text{Initialisering: } P = P_{p,\text{init}} \quad (147)$$

$$\text{Predikert måling: } y_p = g(x_p) \quad (148)$$

$$\text{Innovasjonsvariabel: } e = y_m - y_p \quad (149)$$

$$\text{Måle-korrigert tilstandsestimat (brukes som estimat): } x_c = x_p + K_s e \quad (150)$$

$$\text{Modell-predikert tilstandsestimat: } x_{p,\text{next}} = f(x_c, u) \quad (151)$$

$$\text{Tidsindeksskift: } x_p = x_{p,\text{next}} \quad (152)$$

$$\text{Tidsindeksskift: } P_p = P_{p,\text{next}} \quad (153)$$

Den stasjonære Kalmanforsterkningen K_s kan beregnes f.eks. med dlqe-funksjonen i Pythons Control-pakke:

$$(K_s, P_{\text{corr}}, E) = \text{control.dlqe}(A_d, G, C_d, Q, R) \quad (154)$$

Modell for augmentert tilstand i Kalmanfilter

Modell av augmentert tilstand som representerer antatt konstant parameter eller prosessforstyrrelse som skal estimeres:

$$x'_a = 0 \quad (155)$$

Utvikling av foroverkopler

1. Formuler en prosessmodell som skal danne grunnlaget for foroverkoplingen.
 2. Sett referansen (r) inn for prosessutgangen (y) i prosessmodellen.
 3. Løs prosessmodellen fra punkt 2 mhp. pådraget u , og kall u for u_{ff} . Formelen for u_{ff} er foroverkopleren.
-

SIMC-innstilling av PI-regulator for «integrator med tidsforsinkelse»-prosess

$$K_c = \frac{1}{2K_i t_d} \quad (156)$$

$$T_i = 4t_d \quad (157)$$

SIMC-innstilling av PI-regulator for «integrator»-prosess

$$K_c = \frac{1}{K_i t_{cc}} \quad (158)$$

$$T_i = 2t_{cc} \quad (159)$$

SIMC-innstilling av PI-regulator for nivåregulering

1. Anta $\Delta F_{\text{in,max}}$, og spesifiser akseptabel Δh_{max} .

2. Beregn t_{cc} :

$$t_{cc} = \frac{A \Delta h_{\text{max}}}{\Delta F_{\text{out,max}}} \quad (160)$$

3. Bruk den beregnede t_{cc} til innstilling av nivåregulatoren:

$$K_c = \frac{A}{t_{cc}} \quad (161)$$

$$T_i = 2t_{cc} \quad (162)$$

SIMC-innstilling av PI-regulator for «tidskonstant med tidsforsinkelse»-prosess

$$K_c = \frac{t_c}{2K t_d} \quad (163)$$

$$T_i = \text{minimum}(t_c, 4t_d) \quad (164)$$

SIMC-innstilling av PI-regulator for «dobbelintegrator»-prosess

$$K_c = \frac{1}{2K_{ii} t_{cc}^2} \quad (165)$$

$$T_i = 8t_{cc} \quad (166)$$

$$T_d = 2t_{cc} \quad (167)$$

LQ-regulator

$$u(t) = -G(t)x(t) \quad (168)$$

Stasjonær verdi av regulatorforsterkningen G kan beregnes med f.eks. `lqr`-funksjonen i Pythons `Control`-pakke:

$$(G_s, S, E) = \text{control.lqr}(A, B, Q, R) \quad (169)$$

MPC

MPC-ens pådrag beregnes som den optimale løsningen til optimeringsproblemet

$$\min_{u_{\text{pred}}} J \quad (170)$$

der J er objektfunksjonen:

$$J = \sum_{i=k}^{k+N} \left[e_i^T C_e e_i + u_i'^T C_u u_i' \right] \quad (171)$$

Predikert avvik e kan beregnes som simulert avvik:

$$e_k = r_k - y_{k,\text{pred}} \quad (172)$$

der $y_{k,\text{pred}}$ beregnes fra prosessmodellen med initialtilstand fra sensorer og/eller fra et Kalmanfilter.