Oppgave 0.1 Linearisering av ulineær modell

Likning (2.28) i læreboka er en dynamisk modell av en tank med gjennomstrømning og oppvarming. Modellen gjengis her:

$$c\rho V\dot{T}(t) = P(t) + cw(t)\left[T_i(t) - T(t)\right] \tag{0.1}$$

Anta at c og ρ er konstante. Inngangsvariablene er P, T_i og w.

a. Innfør følgende generelle variabelnavn:

$$x = T \tag{0.2}$$

$$u_1 = P \tag{0.3}$$

$$u_2 = w \tag{0.4}$$

$$u_3 = T_i \tag{0.5}$$

   Påvis at modellen da er ulineær.

b. Finn verdien av x i det statiske arbeidspunktet gitt av at inngangsvariablene har konstante verdier.

c. Lineariser modellen omkring et generelt statisk arbeidspunkt.

Oppgave 0.2 Transferfunksjonen for en (generell) differensiallikning

Finn transferfunksjonen $H(s)$ fra u til x for følgende differensiallikning:

$$a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = bu(t) \tag{0.6}$$

Oppgave 0.3 Karakterisering av transferfunksjon

Gitt transferfunksjonen

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \tag{0.7}$$

a. Av hvilken orden er transferfunksjonen?

b. Skriv opp transferfunksjonens karakteristiske likning.

c. Skriv opp transferfunksjonens karakteristiske polynom.

d. Finn transferfunksjonens poler og nullpunkter.

e. Angi transferfunksjonen på pol/nullpunktform.

Oppgave 0.4 Transferfunksjonen for en blandetank

I eksempel 2 side 20 osv. i læreboken ble den matematiske modellen for en blandetank utviklet. Modellen er gitt ved likning (2.17) læreboken, men gjengis her:

$$\dot{c}_A(t) = \frac{1}{V}\left[w_A(t) - c_A(t)q(t)\right] \tag{0.8}$$

Finn transferfunksjonen $H(s)$ fra w_A til c_A (anta da at q er en konstant).

Oppgave 0.5 Transferfunksjon for et sett av flere differensiallikninger

Gitt modellen

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{0.9}$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u \tag{0.10}$$

$$y = 3x_1 + x_2 \tag{0.11}$$

a. Finn transferfunksjonen fra u til y ved å manipulere likningene ovenfor (formelen (3.138) skal ikke brukes).

b. Finn modellens egenverdier. Er de identiske med polene?

Oppgave 0.6 Opptegning av blokkdiagram

Gitt en termisk prosess med transferfunksjonen $H_p(s)$ fra tilført effekt P til temperatur T:

$$T(s) = H_p(s)P(s) \tag{0.12}$$

der

$$H_p(s) = \frac{b_p}{s + a_p} \tag{0.13}$$

Transferfunksjonen fra temperaturen T til temperaturmålingen T_m er $H_m(s)$:

$$T_m(s) = H_m(s)T(s) \tag{0.14}$$

der

$$H_m(s) = \frac{b_m}{s + a_m} \tag{0.15}$$

a_p, b_p, a_m og b_m er parametre.

a. Tegn et transferfunksjonsblokkdiagram for systemet med P som inngangsvariabel og T_m som utgangsvariabel.

b. Finn transferfunksjonen fra P til T_m fra blokkdiagrammet du tegnet i deloppgave a.

Oppgave 0.7 Bruk av Laplacetransformasjonens definisjon

Finn den Laplacetransformerte, $F(s)$, av tidsfunksjonen

$$f(t) = e^{-t} \tag{0.16}$$

Oppgave 0.8 Laplacetransformasjon med bruk av formler

Utfør Laplacetransformasjon vha. formler i tabellene i vedlegg B i læreboken:

a.

$$y_1(t) = 2 \text{ (sprang ved } t = 0) \tag{0.17}$$

b.

$$y_2(t) = 4t \tag{0.18}$$

c.

$$y_3(t) = 2 + 4t \tag{0.19}$$

Oppgave 0.9 Invers-Laplacetransformasjon med bruk av formler

Utfør invers-Laplacetransformasjon vha. formler i vedlegg B i læreboken:

a.

$$y_1(s) = \frac{5}{s} \tag{0.20}$$

b.

$$y_2(s) = \frac{1}{s^3}\, e^{-2s} \tag{0.21}$$

c.

$$y_3(s) = \frac{2}{10s + 1} \tag{0.22}$$

Oppgave 0.10 Beregning av delrespons vha. transferfunksjonen

Eksempel 3 side 24 osv. i læreboken beskriver et termisk system. Modellen, basert på energibalanse, er gitt ved (2.28) i læreboken. Modellen gjengis her:

$$c\rho V\dot{T}(t) = P(t) + cw\,[T_i(t) - T(t)] \tag{0.23}$$

Laplacetransformasjon av denne modellen gir, se eksempel 22 side 84 i læreboken,

$$T(s) = \frac{\rho V}{\rho V s + w} T_0 + \overbrace{\frac{\frac{1}{c}}{\rho V s + w}}^{T_P(s)} P(s) + \frac{w}{\rho V s + w} T_i(s) \tag{0.24}$$

Anta at $P(s)$ har den konstante verdien P_s for $t \geq 0$, hvilket innebærer at, jf. (B.11) i læreboken,

$$P(s) = \frac{P_s}{s} \tag{0.25}$$

Beregn det tilsvarende bidraget $T_P(t)$ til den totale tidsresponsen $T(t)$.

Oppgave 0.11 Sluttverditeoremet

Se oppgave 0.10. Den Laplacetansformerte av bidraget $T_P(t)$ til den totale tidsresponsen $T(t)$ er

$$T_P(s) = \frac{\frac{1}{c}}{\rho V s + w} P(s) \tag{0.26}$$

Anta at $P(s)$ har den konstante verdien P_s for $t \geq 0$, hvilket innebærer at

$$P(s) = \frac{P_s}{s} \tag{0.27}$$

a. Beregn den stasjonære verdien T_{P_s} vha. sluttverditeoremet.

b. Det kan vises at tidsuttrykket for $T_P(t)$ er

$$T_P(t) = \frac{P_s}{cw}\left(1 - e^{-\frac{t}{\rho V / w}}\right) \tag{0.28}$$

(jf. løsningen til oppgave 0.10). Er det stasjonære løsningen som du kan beregne fra (0.28), lik den stasjonære responsen som du beregnet med sluttverditeormet i deloppgave a?

Oppgave 0.12 Statisk transferfunksjon

I eksempel 21 side 83 i læreboken er det utledet at transferfunksjon for masse-fjær-systemet beskrevet i eksempel 4 side 28, er

$$H(s) = \frac{y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + Ds + K_f} \tag{0.29}$$

a. Finn systemets statiske transferfunksjon, H_s.

b. Anta at kraften $F = F_s$ (konstant). Beregn den statiske responsen y_s vha. den statiske transferfunksjonen funnet deloppgave a.

Del I

Løsninger

Løsning 0.1

a. Modellen er lineær bare dersom den kan skrives på formen (3.3) i læreboken. For systemet i dette eksempelet blir (3.3)

$$\dot{x} + a_0 x = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \tag{0.30}$$

Den gitte modellen (0.1) kan skrives som

$$c\rho V \dot{x}(t) = u_1(t) + c u_2(t)\left[u_3(t) - x(t)\right] \tag{0.31}$$

som åpenbart ikke er på formen (0.30). Modellen er derfor ulineær (ikke lineær).

b. Vi kan bruke subindeks s for å angi statisk verdi. Vi setter den deriverte lik 0 i (0.31) og setter inn statiske verdier. (0.31) blir da

$$0 = u_{1_s} + c u_{2_s}\left(u_{3_s} - x_s\right) \tag{0.32}$$

som løst mhp. x_s blir

$$\underline{\underline{x_s = u_{3_s} + \frac{u_{1_s}}{c u_{2_s}}}} \tag{0.33}$$

eller

$$\underline{\underline{T_s = T_{i_s} + \frac{P_s}{c w_s}}} \tag{0.34}$$

c. Først skrives modellen på standardform (tilstandsrommodellform):

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\frac{1}{c\rho V}\left\{u_1(t) + c u_2(t)\left[u_3(t) - x(t)\right]\right\}}_{f(x,u_1,u_2,u_3)} \tag{0.35}$$

Den lineære lokale modellen blir

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Delta\dot{x}}} &= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u_1}\right|_0 \Delta u_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial u_2}\right|_0 \Delta u_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial u_3}\right|_0 \Delta u_3 && (0.36)\\
&= \underline{\underline{-\frac{u_{2_s}}{\rho V}\Delta x + \frac{1}{c\rho V}\Delta u_1 + \frac{u_{3s} - x_s}{\rho V}\Delta u_2 + \frac{u_{2s}}{\rho V}\Delta u_3}} && (0.37)
\end{aligned}$$

som kan skrives på tilstandsrommform med matriser og vektorer slik:

$$\dot{\Delta\underline{x}} = A\Delta\underline{x} + B\Delta\underline{u} \tag{0.38}$$

der

$$\Delta\underline{x} = \Delta x \tag{0.39}$$

og

$$\Delta\underline{u} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{bmatrix} \tag{0.40}$$

og

$$A = \left[-\frac{u_{2_s}}{\rho V}\right] \tag{0.41}$$

og

$$B \begin{bmatrix} \frac{1}{c\rho V} & \frac{u_{3s}-x_s}{\rho V} & \frac{u_{2s}}{\rho V} \end{bmatrix} \tag{0.42}$$

Løsning 0.2

Laplacetransformasjon av differensiallikningen gir

$$a_1\left[sx(s) - x_0\right] + a_0 x(s) = bu(s) \tag{0.43}$$

som løst mhp. $x(s)$ gir

$$x(s) = \frac{a_1}{a_1 s + a_0} x_0 + \underbrace{\frac{b}{a_1 s + a_0}}_{H(s)} u(s) \tag{0.44}$$

Transferfunksjonen fra u til x er da

$$\underline{\underline{H(s) = \frac{b}{a_1 s + a_0}}} \tag{0.45}$$

Løsning 0.3

a. Orden: $\underline{\underline{2}}$.

b. $\underline{\underline{s^2 + 3s + 2 = 0}}$

c. $\underline{\underline{s^2 + 3s + 2}}$

d. $\underline{\underline{\text{Polene er } -1 \text{ og } -2}}$. $\underline{\underline{\text{Nullpunktet er } -3}}$.

e.
$$\underline{\underline{H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}}} \tag{0.46}$$

Løsning 0.4

Laplacetransformasjon av (0.8) gir

$$sc_A(s) - c_{A_0} = \frac{1}{V}\left[w_A(s) - c_A(s)q\right] \tag{0.47}$$

som ordnet er

$$c_A(s) = \frac{V}{Vs+q}c_{A_0} + \underbrace{\frac{1}{Vs+q}}_{H(s)}w_A(s) \tag{0.48}$$

Transferfunksjonen er altså

$$\underline{\underline{H(s) = \frac{1}{Vs+q}}} \tag{0.49}$$

Løsning 0.5

a. Fra sammenhengen $y = 3x_1 + x_2$ fås at

$$y(s) = 3x_1(s) + x_2(s) \tag{0.50}$$

Søker derfor $x_1(s)$ og $x_2(s)$ uttrykt som funksjoner av $u(s)$. Laplacetransformasjon av differensiallikningene gir (for enkelhets skyld er argumentet s sløyfet nedenfor)

$$\begin{aligned} sx_1 &= x_2 \\ sx_2 &= -2x_1 - 3x_2 + u \end{aligned}$$

Eliminasjon av x_2 gir

$$x_1(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}u(s) \tag{0.51}$$

Eliminasjon av x_1 gir

$$x_2(s) = \frac{s}{s^2+3s+2}u(s) \tag{0.52}$$

Får da

$$\begin{aligned} y(s) &= 3x_1(s)u(s) + x_2(s)u(s) && (0.53)\\ &= \frac{3}{s^2+3s+2}u(s) + \frac{s}{s^2+3s+2}u(s) && (0.54)\\ &= \underbrace{\frac{s+3}{s^2+3s+2}}_{H(s)}u(s) && (0.55) \end{aligned}$$

Transferfunksjonen er altså

$$\underline{\underline{H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}}} \tag{0.56}$$

b. *Polene* er røttene i nevnerpolynomet i transferfunksjonen funnet i oppgave a, dvs. løsningen av den karakteristiske likning:

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \tag{0.57}$$

som har løsningene, dvs. polene,

$$\underline{p_1 = -1, \;\; p_2 = -2} \tag{0.58}$$

Modellens *egenverdier* finnes fra

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &\overset{!}{=} 0 \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & \lambda+3 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &\quad (\lambda+1)(\lambda+2) \end{aligned} \tag{0.59}$$

Egenverdiene er

$$\underline{\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2} \tag{0.60}$$

<u>Egenverdiene er altså identiske med polene.</u>

Løsning 0.7

Vi setter $f(t) = e^{-t}$ inn i (3.177) i læreboka:

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathcal{L}\{e^{-t}\}}} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{-t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s+1)t}dt \\
&= \frac{1}{-(s+1)}\left[e^{-(s+1)t}\right]_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \frac{1}{-(s+1)}[0-1] \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{s+1}}}
\end{aligned}
$$

Løsning 0.8

a. (B.2) og (B.11) gir

$$\underline{\underline{y_1(s) = \frac{2}{s}}} \tag{0.61}$$

b. (B.2) og (B.12) gir

$$\underline{\underline{y_2(s) = \frac{4}{s^2}}} \tag{0.62}$$

c. (B.1) og (B.12) gir

$$\underline{\underline{y_3(s) = \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2}}} \tag{0.63}$$

Løsning 0.9

a. (B.2) og (B.11) gir

$$\underline{\underline{y_1(t) = 5 \text{ sprang med høyde 5 ved } t = 0)}} \tag{0.64}$$

b. (B.2), (B.3) og (B.13) gir

$$\underline{\underline{y_2(t) = 0,5(t-2)^2,\ y_2(t) = 0 \text{ for } t < 2}} \tag{0.65}$$

c. (B.2) og (B.14) gir

$$\underline{\underline{y_3(t) = 0,2e^{-0,1t}}} \tag{0.66}$$

Løsning 0.10

Fra (0.24) har vi

$$T_P(s) = \frac{\frac{1}{c}}{\rho V s + w} P(s) \tag{0.67}$$

$$= \frac{\frac{1}{c}}{\rho V s + w} \cdot \frac{P_s}{s} \tag{0.68}$$

som, invers-transformert vha. (B.1) og (B.16), gir

$$\underline{\underline{T_P(t) = \frac{P_s}{cw}\left(1 - e^{-\frac{t}{\rho V/w}}\right)}} \tag{0.69}$$

Løsning 0.11

a. Sluttverditeoremet gir

$$\underline{\underline{T_{P_s}}} = \lim_{t\to\infty} T_P(t) = \lim_{s\to 0} s\left[T_P(s) = \frac{\frac{1}{c}}{\rho V s + w}\frac{P_s}{s}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{\frac{1}{c}P_s}{\rho V s + w} = \underline{\underline{\frac{P_s}{cw}}} \tag{0.70}$$

b.

$$T_{P_s} = \lim_{t\to\infty}\left[T_P(t) = \frac{P_s}{cw}\left(1 - e^{-\frac{t}{\rho V/w}}\right)\right] = \frac{P_s}{cw}(1-0) = \underline{\underline{\frac{P_s}{cw}}} \tag{0.71}$$

som er samme svar som funnet med sluttverditeoremet.

Løsning 0.12

a. Den statiske transferfunksjonen er

$$\underline{\underline{H_s}} = \lim_{s\to 0}\left[H(s) = \frac{1}{ms^2 + Ds + K_f}\right] = \underline{\underline{\frac{1}{K_f}}} \tag{0.72}$$

(som er et rimelig resultat da posisjonen er lik kraften dividert med fjærkonstanten, statisk sett).

b. y_s kan beregnes ved

$$\underline{\underline{y_s}} = H_s F_s = \underline{\underline{\frac{F_s}{K_f}}} \tag{0.73}$$